

高中生数学逆向思维能力的调查与分析

袁昌华, 顾文军

(江苏省邗江中学, 江苏 扬州 225009)

摘要: 逆向思维能力的发展有助于改善学生学习数学的思维方式, 激发学生开拓创新精神, 使学生将来能适应社会需要. 对高中生的调查表明: 学生数学逆向思维能力总体发展水平偏低, 各逆向策略的运用存在显著差异. 测试卷的分析发现, 数学观对学生逆向策略的运用存在影响, 正逆向思维的关系辩证而统一.

关键词: 数学逆向思维; 高中生; 调查分析

中图分类号: G424.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-9894 (2012) 06-0054-05

1 问题的提出

所谓思维, 就是人脑对客观事物的本质、相互关系及其内在规律性的概括与间接反映^[1]. 逆向思维是指与常规正向思维方向相反的思维过程, 即通常所说的“倒着想”或“反过来想一想”. 数学中的逆向思维有两个特征: (1) “可逆性”, 即反过来思考, 如逆题目结论, 逆推理方法, 逆常规方法, 逆序转化等; (2) “双向性”, 即正反交叉思考, 解题时将两个对立统一的概念、运算、定理等交叉考虑, 思维从一个方向转向相反方向. 前苏联心理学家克鲁捷茨基的研究表明, 逆转心理过程 (从顺向的思维序列转到逆向的思维序列) 的能力是 9 种数学能力之一, 有这种数学能力的学生显然具有迅速而敏锐地重建心理过程方向的能力, 明显地具有推理过程顺畅的可逆性, 对能力差的学生来说, 这一过程是极其困难的^[2]. 喻平教授认为, 采用逆向思维策略解决问题, 往往使正向思维所不易解决的问题得到解决, 分析法、逆推法、反证法、同一法、反驳、公式的逆用、常量与变量换位等方法, 都是逆向思维策略的具体应用^[3].

随着时代的发展, 为了求新求异, 人们对许多问题的思考都是以逆向思维方式进行的, 诸如投资理财、广告策划等. 逆向思维作为创新思维的一种特殊形式, 正变得与人们的生活息息相关. 对于处在青少年阶段的高中学生, 其思维方式、方法和品质日趋成熟与稳定, 培养逆向思维能力, 将有助于改善学生学习数学的思维方式, 形成良好的思维品质, 激发学生开拓创新精神, 使学生将来能适应社会需要.

当前国内数学教育界, 对逆向思维的研究, 更多关注的是其在解题中的运用, 偏重于理论层面的探讨, 实证研究寥寥可数. 有研究表明, 四川省 6 年级小学生的数学逆向思维能力较差, 约有 20% 的学生不能发现可以运用乘法分配律化简并计算^[4]. 那么目前高中生数学逆向思维能力的状况如何? 高中生在运用逆向思维策略解题时存在哪些薄弱点? 文章试图通过调查分析给出答案.

2 研究方法

2.1 被试的选择

随机抽取扬州市不同层次的 3 所学校的高一、高二年级

6 个班的学生作为测试对象, 剔除无效试卷, 得到有效试卷 304 份, 其中男生 146 人, 女生 158 人.

2.2 测试卷的编制

测试卷的目的是通过了解学生对数学逆向思维策略的掌握和运用, 考察其逆向思维能力. 经查阅相关文献, 结合高中数学教学内容, 确定 5 个问题, 分别涉及公式的逆用 (问题 1)、补集思想 (问题 2)、常量与变量换位 (问题 3)、找反例 (问题 4)、反证法 (问题 6), 同时增加一道趣味问题 (问题 5), 以提高测试卷的效度. 正式测试前, 选择非样本对象进行预测, 根据测试结果降低了个别题目的难度.

2.3 测试的实施

调查于 2011 年 12 月份展开, 采取随机整群抽样的方法进行, 测试时间 50 分钟. 为了测试和统计出较可靠的信息, 在测试卷头设置了统一的指导语, 明确要求学生对相反或否定方面探索问题. 测试结束后, 在不同层次学校的学生中各随机挑选 5 名学生就平时解题中对逆向策略的运用情况, 以及测试中选择相应解题策略的原因进行访谈.

2.4 测试卷的评估

测试卷评估的重点是学生思维的可逆性和双向性, 同时关注计算结果的正确性. 每题学生得到的最高分是 1 分, 表示思维过程体现可逆性和双向性, 并且计算完全正确; 0.75 分表示思维过程体现一定的可逆性和双向性, 过程比较完整, 计算正确; 0.5 表示思维比较完整, 体现一定的可逆性和双向性, 计算不正确; 0.25 表示思维过程不完整, 仅仅体现部分的可逆性或双向性, 计算不正确; 0 分表示学生没有答题. 如果学生的回答没有体现思维的可逆性和双向性, 即使答案正确仍为 0 分. 所有数据采用 SPSS17.0 进行统计分析.

3 结果分析

3.1 当前高中生逆向思维能力现状

高中生数学逆向思维能力的总体状况如表 1 所示.

表 1 高中生数学逆向思维能力的总体状况

N	均值	标准差	最小值	最大值
304	2.31	0.9	0.5	5

测试卷总分 6 分, 统计表明, 最高分 5 分, 最低分 0.5

收稿日期: 2012-06-13

基金项目: 江苏省教育科学“十二五”规划课题——基于信息技术环境的学科教学过程整体重构与设计的研究 (D/2011/02/161)

作者简介: 袁昌华 (1963—), 男, 江苏邗江人, 中学高级教师, 主要从事中学教学与数学教育研究.

分, 平均分 2.31 分, 处于中等偏下的水平. 各逆向策略平均分由高到低依次为: 公式的逆用(0.62)、补集思想(0.29)、常量与变量换位(0.26)、找反例(0.21)、反证法(0.15), 可以发现, 从补集思想开始, 学生的得分迅速下降. 为了检验各策略之间是否存在显著性差异, 采用单因素方差分析对被试在 5 种逆向策略的得分进行比较^[5-6]. 以 5 种逆向策略

为自变量, 分别用数字 1~5 来表示, 依据测试卷评估标准计算出被试在各策略上的得分, 命名为 score, 以 score 为因变量. 将数据作方差齐性检验, 因变量(score)的显著性水平小于 0.05, 各逆向策略的方差为非齐性, 因此采用方差不齐假设下的 Tamhane 法进行多重比较, 结果见表 2.

表 2 数学逆向思维策略的多重比较

(I) 逆向策略	(J) 逆向策略	均值差(I-J)	标准误	显著性	95% 置信区间	
					下限	上限
逆用公式	补集思想	.330 99 [*]	.046 68	.000	.199 2	.462 8
	常量与变量换位	.355 63 [*]	.041 77	.000	.237 8	.473 5
	找反例	.406 69 [*]	.043 54	.000	.283 8	.529 6
	反证法	.466 55 [*]	.037 94	.000	.359 5	.573 6
补集思想	逆用公式	-.330 99 [*]	.046 68	.000	-.462 8	-.199 2
	常量与变量换位	.024 65	.048 65	1.000	-.112 7	.162 0
	找反例	.075 70	.050 17	.759	-.065 9	.217 3
	反证法	.135 56 [*]	.045 40	.031	.007 3	.263 8
常量与变量换位	逆用公式	-.355 63 [*]	.041 77	.000	-.473 5	-.237 8
	补集思想	-.024 65	.048 65	1.000	-.162 0	.112 7
	找反例	.051 06	.045 65	.954	-.077 7	.179 9
	反证法	.110 92	.040 34	.062	-.002 9	.224 8
找反例	逆用公式	-.406 69 [*]	.043 54	.000	-.529 6	-.283 8
	补集思想	-.075 70	.050 17	.759	-.217 3	.065 9
	常量与变量换位	-.051 06	.045 65	.954	-.179 9	.077 7
	反证法	.059 86	.042 17	.819	-.059 2	.178 9
反证法	逆用公式	-.466 55 [*]	.037 94	.000	-.573 6	-.359 5
	补集思想	-.135 56 [*]	.045 40	.031	-.263 8	-.007 3
	常量与变量换位	-.110 92	.040 34	.062	-.224 8	.002 9
	找反例	-.059 86	.042 17	.819	-.178 9	.059 2

注: 均值差的显著性水平为 0.05

多重比较结果显示: 公式的逆用与其它 4 种策略之间都存在显著性差异, 补集思想与反证法之间也存在显著性差异, 其它各逆向思维策略之间的差异不显著. 总的来说, 学生对公式的逆用掌握的最好, 其它逆向思维策略的掌握情况都不尽如人意, 其中反证法最为薄弱.

3.2 数学逆向思维能力与数学成绩的相关性

其中数学成绩以被试期末数学统考成绩为指标, 结果如表 3 所示.

表 3 数学逆向思维能力与数学成绩的相关性

		逆向思维能力	数学学习成绩
逆向思维能力	Pearson 相关性	1	0.281 [*]
	显著性(双侧)		0.031
	N	304	304
数学学习成绩	Pearson 相关性	0.281 [*]	1
	显著性(双侧)	0.031	
	N	304	304

注: *表示在 0.05 水平上显著相关(双侧)

从表 3 可看出, 学生数学逆向思维能力与学习成绩之间的皮尔逊相关系数为 0.281, 达到了 Sig.<0.05 的显著性水平(Sig.=0.031), 两者的关系在统计学上具有显著意义, 但一般认为, 相关系数的绝对值低于 0.3 时可以忽略自变量的影响. 因此, 总的来说, 两者之间基本不存在相关性. 这

表明目前的高中数学教学仍以正向思维训练为主, 逆向思维的培养没有得到重视, 两者的发展不平衡.

3.3 男女生差异检验

为考察学生数学各逆向思维策略在不同主效应下的差异和变化, 引入性别作为特征变量进行独立样本 *t* 检验^[7], 结果如表 4 所示.

表 4 数学逆向思维能力的性别差异 *t* 检验

因素	性别差异 <i>t</i> 检验 (<i>M</i> + <i>SD</i>)		
	男生 (<i>n</i> =146)	女生 (<i>n</i> =158)	<i>t</i>
逆向公式	0.614 9+0.357	0.625 0+0.310	0.181
补集思想	0.319 9+0.316	0.260 1+0.341	0.796
常量与变量换位	0.202 7+0.348	0.330 9+0.385	2.084 [*]
找反例	0.297 3+0.448	0.121 3+0.313	-2.727 ^{**}
反证法	0.183 8+0.384	0.125 0+0.271	1.144

注: **表示差异非常显著, 即 *P*<0.01, *表示差异显著, 即 *P*<0.05

从表 4 中可发现, 男生在找反例能力上极其显著的高于女生, 而女生对常量与变量换位的运用要好于男生, 并且差异显著. 相比之下, 男生更喜欢独立思考, 发表不同意见, 思维更具有批判性, 但女生具有较强的记忆力, 对课堂教学内容印象深刻.

4 对测试卷的再分析

以上数据分析表明, 除了公式的逆用, 学生对其他逆向

策略的运用都不尽如人意. 那数据背后, 学生的解答情况到底如何? 有哪些特点? 存在哪些典型错误? 为了弄清这些问题, 下面对学生的测试卷进行再分析.

4.1 补集思想的运用情况

问题 2: 已知集合 $A = \{x | x^2 + 3x - 18 > 0\}$, $B = \{x | (x - k)(x - k - 1) \leq 0\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求 k 的取值范围是什么.

题目正确率为 29.6%, 有 62% 的学生倾向于在解出 A 、 B 集合的范围后, 根据 $A \cap B \neq \emptyset$ 直接跳步得到 $k < -6$ 或 $k + 1 > 3$, 但不少学生因此产生错误, 如图 1. 不可否认, 此题难度不大, 学生完全可以结合数轴上 A 集合的范围跳步作答, 但多数学生忽略指导语的提示, 选择直接作答, 从中不难看出, 学生受正向思维定势的影响, 缺少从反面思考问题的意识和习惯. 正如心理学家 N·R·F·梅伊尔在研究过去经验对于问题解决过程的作用时所指出的: “一个人不会解一道题, 不是因为他不能找到一种解法, 而在于他习惯的运算方法妨碍了他去想出恰当的解题方法.”^[8]

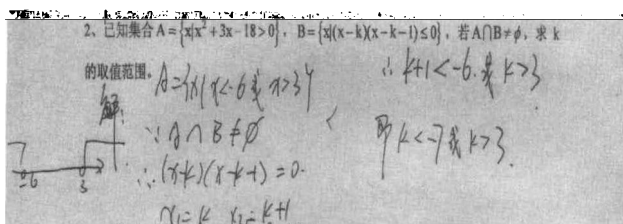


图 1 第 2 题典型错误解答

4.2 常量与变量换位的运用情况

问题 3: 设不等式 $mx^2 - 2x - m + 1 < 0$ 对于满足 $-2 \leq m \leq 2$ 的 m 值都成立, 求 x 的取值范围.

此题的正确率为 22.5%, 图 2 就是一名学生正确的答题过程. 反观学生的错误, 主要有两种: 策略性错误 (30%) 和过程性错误 (27%), 前者是将 m 视为参数进行分离, 后者是知道要将 m 和 x 换位, 但在解题过程中出现错误, 对第二钟错误的分析发现, 除了计算错误, 更多学生是没有真正弄懂为什么要这样做, 对方法的运用还停留在记忆层面, 如图 3.

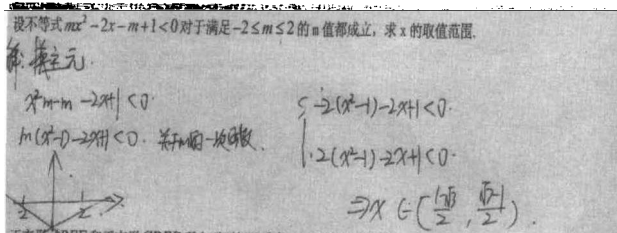


图 2 第 3 题正确解答

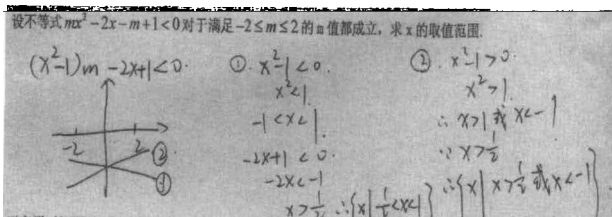


图 3 第 3 题错误解答

比较发现, 两钟解法的区别在于对 m “角色”的定位,

前者将 $(x^2 - 1)m - 2x + 1$ 看成关于 m 的一次函数, 数形结合流畅地解决问题, 而后者表面上也将函数整理成关于 m 的一次函数形式, 甚至还画出函数对应的直线图像, 但接下来却没有抓住 m 主变量的角色加以讨论, 解答的过程前后两部分出现“断链”, 这说明学生还没有建立起对这一方法的实质性理解. 联想到预测中的一道题: 解关于 x 的方程 $x^3 + (1 + \sqrt{2})x^2 - 2 = 0$, 全班 54 人没有 1 人采用常量与变量换位的方法, 即使能做对也都是通过因式分解得到 $(x^2 + x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$ 解出 x , 正式测试时删去此题. 看得出来, 学生不善于解答此类问题, 究其原因, 主要是平时接触较少, 导致学生对这种常量与变量换位的思考方式很不适应, 更深层次的原因在于学生静态的数学观抑制了思维的灵活性. 所谓静态的数学观, 即人们往往把数学等同于数学知识 (特别是“事实性结论”) 的汇集^[9], 用孤立的、静止的和片面的观点看待问题. 它以一种不易察觉的方式影响学生的解题, 学生对变量与常量的关系容易产生先入为主的印象, 认为“数学就应该这样”, 这一点在随后的访谈中也得到了证实.

4.3 找反例的运用情况

问题 4: 设 $\triangle ABC$ 三边长分别是 a 、 b 、 c , 且 $a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{c}$, 则此三角形一定是正三角形吗? 请说明理由.

此题找个反例 $a = \frac{1}{b}$, 就能轻松否定结论, 但仅有 19%

的学生做对, 居然有 53% 的学生证明了此三角形一定是正三角形, 如图 4. 从证明过程中发现, 学生曾推出 $ab = 1$, 但未作深入思考, 很快又否定了. 命题证明的心理分析表明, 在命题检验中, 人表现出强烈的证实倾向, 即极力证实命题为真, 而很少尝试证伪, 即不习惯用反例驳倒命题^[10]. 研究过程中也印证了这一结论.

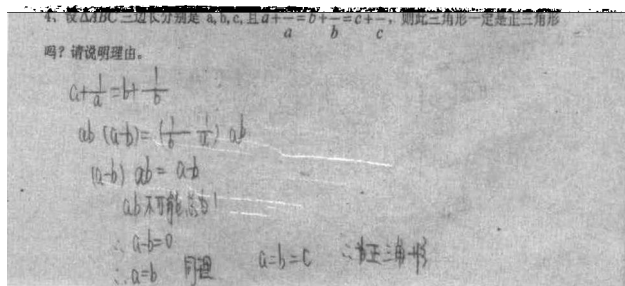


图 4 第 4 题的典型错误解答

出乎意料的是有学生通过画函数图像找到反例, 如图 5. 这可以说是一个意外收获, 但如果站在学生的角度分析, 其实是情理之中的, 因为看似轻松的反例, 对没有逆向思维习惯的学生来说是很难发现的, 正是借助于直观图像才使得学生的思考有所依据, 推理得以进行. 事实上, 在对前两题的分析过程中, 也产生了这样的深切感受, 即如果学生在解答中借助于图像往往会增加正确的机率. 那学生头脑中暴露出来的这一解法又能给教师的教学带来哪些启示呢? 不妨先剖析一下学生的认知过程: 在问题表征阶段, 包括理解题目的字面含义和识别题目的类型为探索型问题, 模式识别

阶段. 对题目中所给的材料 $a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{c}$ 进行概括, 发现熟悉的函数模型 $y = x + \frac{1}{x}$, 在长时记忆中提取相应的函数图像, 之前对函数图像性质的了解帮助学生很快发现 $x = \frac{1}{2}$ 和 $x = 2$ 时函数值相等, 从而找到反例, 实现解题的迁移, 解题监控贯穿整个的解题过程^[11]. 可以看出在这一过程中, 学生的概括能力、知识基础(特别是图像)和以往解题经验起到了关键性的作用, 而这些正是来自他之前所受的正向的思维训练. 因此, 正向思维与逆向思维并不完全对立, 两者的关系是辩证统一的, 逆向思维能力的培养也不应该成为一个独立系统, 而应该和正向思维训练相结合, 渗透在常规的教学过程中.

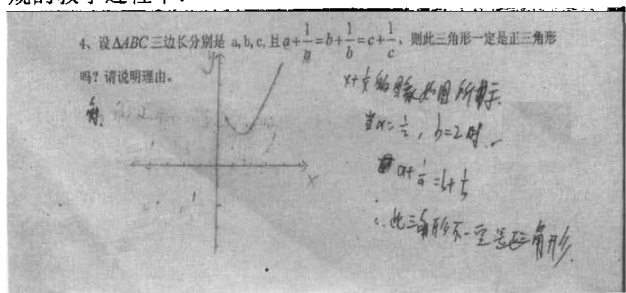


图5 第4题的正确解答

5 结论与建议

通过以上的定量分析和定性分析, 可得如下结论:

(1) 高中生数学逆向思维能力总体发展水平偏低, 逆向思维能力与数学成绩之间不存在相关性, 各逆向思维策略得分由高到低依次为: 公式的逆用、补集思想、常量与变量换位、找反例、反证法, 其中公式的逆用与其它策略之间, 补集思想与找反例之间均存在显著性差异. 男女生在逆向思维策略的运用上各有千秋, 男生找反例的能力极其显著优于女生, 而女生对常量与变量换位的运用显著好于男生, 其它方面不存在显著性差异.

(2) 高中生缺少从反面考虑问题的意识和习惯, 这在具体问题的定性分析中显露无疑, 学生在命题检验中倾向于证实命题为真, 很少尝试举反例, 这与心理学研究的结论是一致的. 学生对常量与变量换位的策略存在理解上的障碍, 接受起来没有想象中简单. 定性分析还发现, 学生在正向思维训练中所获得的概括能力、知识基础(特别是图像)和解题经验保证了逆向思维顺利进行, 正逆两种思维的关系辩证而统一, 这纠正了研究者先前对两种思维关系的片面认识, 同时为教学提供了重要的启示.

基于研究所得结论, 为提高学生的逆向思维能力, 给出如下建议:

(1) 观念保证.

观念指导行动, 学生的数学观就像一只无形的手指引着学习过程, 深刻影响着学习的结果^[12]. 要发展学生的逆向思维能力, 教师首先要帮助学生实现由静态数学观向动态数学观的转变. 所谓动态的数学观, 即数学体现着人类的发明与创造, 数学是一个有内部联系的、动态发展的学科^[13]. 一般认为, 教师的数学观会直接影响学生的数学观^[14], 因此, 要转变学生的数学观, 教师自己首先要形成动态的数学观, 要不断加强理论学习, 开阔数学视野, 并将自身的感悟融入教学实践中, 结合具体问题, 培养学生用联系的、运动变化的、辩证的观点看待问题, 潜移默化地影响学生的数学观.

(2) 习惯养成.

众所周知, 习惯的养成非一朝一夕的事. 教师应将对学习逆向思维习惯的培养, 渗透在常规教学活动中, 如在命题教学中, 当正向探究结束后, 要引导学生对原命题作逆向探究, 或者引导学生构造反例驳倒似是而非的命题; 在解题教学中, 进行变式训练, 对调题目中条件和结论让学生逆向探究等. 这种经常性的反方向思维运动有助于增强学生逆转心理过程的能力, 养成从反面思考问题的习惯.

(3) 方法培育.

建构主义的学习观认为, 学习并非学生对教师所授予知识的被动接受, 而是以其已有的知识和经验为基础的主动建构^[15]. 反复操练与强制灌输无助于学生对逆向策略的理解和掌握, 因此, 教师在传授逆向策略时, 不妨可以运用一下“逆向策略”, 即先顺应学生的思维习惯, 从正面解答, 然后启发引导学生变换角度逆向解答, 并因势利导让学生对两种方法做出比较, 让学生在思维的碰撞中体验到逆向策略的妙处, 自觉完成对思维方式的重构, 舍得之间, 方显教育之智慧. 唯有如此, 才能在正向思维的枝干上培育出逆向思维之花.

6 反思与展望

此次研究选择高中数学教学中较常见的逆向思维问题(有的问题就来自学生的作业或试卷), 试图了解高中生对逆向策略的掌握情况, 力求真实反映高中生逆向思维能力发展现状. 由于各方面条件限制, 研究中还存在许多不足: 首先是问卷的设计, 对于其中每个问题到底是否真能测试出有关反应, 即问卷的效度有待论证; 其次对学生逆向思维策略的考查还不够全面. 通过此次研究发现, 有很多问题值得进一步研究, 如各学段逆向思维能力发展的比较研究, 正逆思维的培养如何有效结合等, 希望此文能引发对数学逆向思维能力的深入研究.

[参考文献]

- [1] 郑君文, 张恩华. 数学学习论[M]. 南宁: 广西教育出版社, 1999.
- [2] 克鲁捷茨基. 中小学数学能力心理学[M]. 李伯黍, 洪宝林译. 上海: 上海教育出版社, 1987.
- [3] 喻平. 数学教育心理学[M]. 南宁: 广西教育出版社, 2008.
- [4] 张晓霞, 何立新, 郑大明. 四川省六年级小学生数学基本计算技能的调查报告[J]. 数学教育学报, 2009, 18(4):

42-45.

- [5] 张文字, 傅海伦. 初中生数学学习选择能力的年级差异调查研究[J]. 数学教育学报, 2010, 19 (2): 47-49.
- [6] 吴琼. 高中生对简单线性规划知识理解能力的调查分析[J]. 数学教育学报, 2010, 19 (5): 68-70.
- [7] 鲍曼, 张红伟, 郭慧莹, 马丽丽. 哈尔滨市私立中学学生数学成就动机调查研究[J]. 数学教育学报, 2008, 17 (1): 51-55.
- [8] 朱华伟, 郑焕. 《中小学生学习数学能力心理学》中蕴含的解题思想[J]. 数学教育学报, 2010, 19 (2): 10-14.
- [9] 郑毓信. 数学教育哲学[M]. 成都: 四川教育出版社, 1995.
- [10] 喻平. 数学教育心理学[M]. 南宁: 广西教育出版社, 2008.
- [11] 喻平. 中学生自我监控能力和 CPFS 结构对数学学业成绩的影响[J]. 数学教育学报, 2004, 13 (1): 23-26.
- [12] 唐剑岚, 喻平, 颜丽增. 高中生数学认识信念的调查与思考[J]. 中学数学教学参考 (高中), 2008, (3): 51-55.
- [13] 李渺, 喻平. 实习教师数学教育观念的现状分析及其思考[J]. 数学教育学报, 2009, 18 (3): 27-30.
- [14] 金美月, 郭艳敏, 代枫. 数学教师信念研究综述[J]. 数学教育学报, 2009, 18 (1): 25-30.
- [15] 王存荣. 在反思性数学教学中培养学生提出问题的能力[J]. 数学教育学报, 2009, 18 (1): 45-47.

Analysis and Survey of Reverse Thinking Ability on Senior School Students

YUAN Chang-hua, GU Wen-jun

(Hanjiang High School of Jiangsu Province, Jiangsu Yangzhou 225009, China)

Abstract: The development of reverse thinking ability helps to improve the mode of students' mathematical learning way, to stimulate students' pioneering and innovative spirit, so that students can adapt to the needs of community. A survey of high school students shows that: students' mathematical thinking ability in low level, the use of reverse strategy has significant difference. From the analysis of test paper we found that the beliefs of mathematics effect students' reverse strategy using, the relationship of positive and reverse thinking is dialectical and united. So we propose teaching proposal from concept guarantee, habit forming and methods training.

Key words: math reverse thinking; high school students; survey and analysis

[责任编辑: 周学智]



书 讯

新书介绍:《高中数学轻松学》

作者: 杨冠夏 于世章 董天龙

出版: 中国海洋大学出版社

内容简介: 这是一套与新课标高中数学教材配套的数学教材理解与数学学习方法的指导书籍. 它以数学语言和各单元的学科特征定位展示出如何让你轻松学好数学的诀窍. 本书揭示了若干数学专题的解题入门规律, 对数学学习过程中若干热点问题做出了科学的评价, 对于许多数学问题展示了作者独到的研究成果. 本书凝聚了作者在数学教学的 47 年的教学积累, 突显了作者的数学教学特色.

本书定价:《必修 1、2、3》29.50 元/册;

《必修 4、5》25.00 元/册;

《选修 2-1、2、3》27.50 元/册; 三册合计 82.00 元.

欲订购者请与中国海洋大学出版社营销部联系, 多购可享受打折优惠, 也可以网购.

联系电话: 0532-82032115 0532-82032573